

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2019, Convocatoria
extraordinaria

mentoor.es



Sèrie 5

Ejercicio 1. Análisis

Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

- Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.
- Calcule el área de la región del apartado anterior.

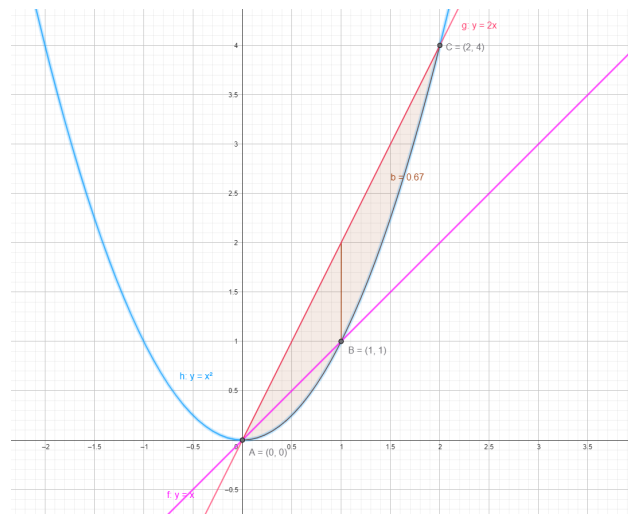
Solución:

- Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.

Calculamos las intersecciones dos a dos:

- $y = x$ con $y = x^2$: $x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$. Puntos: $(0,0)$ y $(1,1)$.
- $y = 2x$ con $y = x^2$: $2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$. Puntos: $(0,0)$ y $(2,4)$.
- $y = x$ con $y = 2x$: $x = 2x \Rightarrow x = 0$. Punto: $(0,0)$.

Esbozo:



- Calcule el área de la región del apartado anterior.

La región está dividida en dos por la recta $x = 1$.

- Área 1 (de $x=0$ a $x=1$):** La región está limitada por arriba por $y = 2x$ y por abajo por $y = x$.

$$A_1 = \int_0^1 (2x - x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- Área 2 (de $x=1$ a $x=2$):** La región está limitada por arriba por $y = 2x$ y por abajo por $y = x^2$.

$$A_2 = \int_1^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

El área total es la suma de ambas: $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$.

El área de la región es $\frac{7}{6} \text{ u}^2$.

Ejercicio 2. Álgebra

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en que a es un parámetro real.

- Encuentre los valores del parámetro a para los cuales la matriz es invertible.
- Discuta la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a .

Solución:

- Encuentre los valores del parámetro a para los cuales la matriz es invertible.

Una matriz es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = 1(a-3a) - 0 + (a-1)(3a-4a) = -2a + (a-1)(-a) = -2a - a^2 + a = -a^2 - a.$$

$$|A| = 0 \implies -a^2 - a = 0 \implies -a(a+1) = 0. \text{ El determinante es cero si } a = 0 \text{ o } a = -1.$$

La matriz es invertible para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

- Discuta la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a .

$$\text{El sistema de ecuaciones es } \begin{cases} x + 0y + (a-1)z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ 4x + 3ay + z = 3 \end{cases}. \text{ La matriz de coeficientes es } A.$$

Caso 1: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. $|A| \neq 0$. El sistema es Compatible Determinado. **Los tres planos se cortan en un único punto.**

Caso 2: $a = 0$. $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. El sistema es Compatible Indeterminado. **Los tres planos se cortan en una recta.**

Caso 3: $a = -1$. $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es Incompatible. Los planos 2 y 3 son paralelos. **Dos planos son paralelos y el tercero los corta.**

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \implies$ Se cortan en un punto.
 Si $a = 0 \implies$ Se cortan en una recta.
 Si $a = -1 \implies$ Dos planos paralelos cortados por el tercero.

Ejercicio 3. Álgebra

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
- Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de todas dos matrices ha de ser cero.

Solución:

- Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -6+6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & -1+3 \\ 4-12 & -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de todas dos matrices ha de ser cero.

La afirmación del enunciado es incorrecta. La propiedad correcta es que **al menos uno** de los determinantes debe ser cero. Lo justificamos con la propiedad $\det(CD) = \det(C)\det(D)$.

Si $CD = 0$, entonces $\det(CD) = \det(0) = 0$. Por tanto, $\det(C)\det(D) = 0$. Esto implica que $\det(C) = 0$ o $\det(D) = 0$.

No se puede asegurar que ambos sean cero. Sin embargo, si uno de ellos fuera no nulo (por ejemplo $\det(C) \neq 0$), entonces C tendría inversa C^{-1} .

$$C \cdot D = 0 \implies C^{-1}CD = C^{-1}0 \implies D = 0.$$

Esto contradice la hipótesis de que D es no nula. Por lo tanto, $\det(C)$ debe ser 0. Análogamente, si $\det(D) \neq 0$, implicaría que $C = 0$, otra contradicción. Por lo tanto, si ambas son no nulas, ambas deben tener determinante cero.

vspace10pt

Si $CD = 0$, entonces $\det(C)\det(D) = 0$.

Si C y D son no nulas, se deduce que $\det(C) = 0$ y $\det(D) = 0$.

Ejercicio 4. Análisis

Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.
- Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que el pendiente de la recta tangente es máximo.

Solución:

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.

La tangente es horizontal si $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \implies -2x = 0 \implies x = 0.$$

El punto de tangencia es $(0, f(0)) = (0, 1)$. La recta horizontal que pasa por este punto es $y = 1$.

La ecuación de la tangente horizontal es $y = 1$.

- Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que el pendiente de la recta tangente es máximo.

Buscamos maximizar la función pendiente, $m(x) = f'(x)$. Derivamos $m(x)$ e igualamos a cero.

$$m'(x) = f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

$$m'(x) = 0 \implies 6x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = 1/3 \implies x = \pm 1/\sqrt{3}.$$

Para saber cuál es el máximo, analizamos el signo de $m'(x)$ o usamos la tercera derivada. En $x = -1/\sqrt{3}$ hay un máximo de la pendiente. El punto de la gráfica es $(-1/\sqrt{3}, f(-1/\sqrt{3})) = (-1/\sqrt{3}, \frac{1}{1+1/3}) = (-1/\sqrt{3}, 3/4)$.

El punto es $(-1/\sqrt{3}, 3/4)$.

Ejercicio 5. Geometría

Sean P , Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX , OY y OZ , respectivamente.

- Calcule los puntos P , Q y R , y el perímetro del triángulo de vértices P , Q y R .
- Calcule el área del triángulo de vértices P , Q y R .

Solución:

- Calcule los puntos P , Q y R , y el perímetro del triángulo de vértices P , Q y R .

Calculamos las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes:

Punto P (eje OX): Hacemos $y = 0, z = 0$.

$$x + 4(0) + 2(0) = 4 \implies x = 4 \implies P = (4, 0, 0).$$

Punto Q (eje OY): Hacemos $x = 0, z = 0$.

$$0 + 4y + 2(0) = 4 \implies y = 1 \implies Q = (0, 1, 0).$$

Punto R (eje OZ): Hacemos $x = 0, y = 0$.

$$0 + 4(0) + 2z = 4 \implies z = 2 \implies R = (0, 0, 2).$$

El perímetro es la suma de las longitudes de los lados (módulos de los vectores):

$$|\vec{PQ}| = |Q - P| = |(-4, 1, 0)| = \sqrt{16 + 1 + 0} = \sqrt{17}.$$

$$|\vec{QR}| = |R - Q| = |(0, -1, 2)| = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}.$$

$$|\vec{PR}| = |R - P| = |(-4, 0, 2)| = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5}.$$

$P(4,0,0), Q(0,1,0), R(0,0,2). \text{ Perímetro} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \text{ u.}$
--

- Calcule el área del triángulo de vértices P , Q y R .

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus vectores lado, por ejemplo $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$.

$$\vec{PQ} = (-4, 1, 0), \quad \vec{PR} = (-4, 0, 2).$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(2) - \vec{j}(-8) + \vec{k}(4) = (2, 8, 4).$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} |(2, 8, 4)| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 64 + 16} = \frac{\sqrt{84}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{2} = \sqrt{21}.$$

El área del triángulo es $\sqrt{21} \text{ u}^2$.
--



Ejercicio 6. Análisis

Considere la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

- Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- Calcule el área de la región del pla determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$ y el eje de las abscisas.

Solución:

- Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

Dominio: El logaritmo exige $x > 0$ y el denominador $x \neq 0$. El dominio es $(0, +\infty)$.

Puntos de corte: No corta el eje OY ($x \neq 0$). Corte con OX ($y = 0$): $\frac{\ln x}{x} = 0 \implies \ln x = 0 \implies x = 1$. El punto de corte es $(1, 0)$.

Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 1 \implies x = e.$$

Estudiamos el signo de la derivada:

- Intervalo $(0, e)$: $f'(x) > 0 \implies$ **Creciente**.
- Intervalo (e, ∞) : $f'(x) < 0 \implies$ **Decreciente**.

Hay un máximo relativo en $x = e$.

Dominio: $(0, \infty)$. **Corte OX:** $(1, 0)$.
Creciente en $(0, e)$, **Decreciente en** (e, ∞) .

- Calcule el área de la región del pla determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$ y el eje de las abscisas.

En el intervalo $[1, e]$, la función $f(x)$ es positiva. El área es:

$$\text{Área} = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx$. Si $x = 1, u = 0$. Si $x = e, u = 1$.

$$\text{Área} = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

El área es de $\frac{1}{2} u^2$.